

# Προβλήματα Αστροφυσικής II (2<sup>ο</sup> σετ)

## Ο Γαλαξίας

1. Ξεκινώντας από τη σχέση του νόμο του de Vaucouleurs

$$I(R) = I_e \exp \left[ -7.67 \left[ \left( \frac{R}{R_e} \right)^{1/4} - 1 \right] \right]$$

όπου  $I(R)$  είναι σε μονάδες λαμπρότητας ( $L_\odot/\text{pc}^2$ ),

να δείξετε ότι η αντίστοιχη σχέση σε μονάδες μεγεθών ( $\text{mag}/\text{asec}^2$ ) είναι

$$\mu(r) = \mu_e + 8.3268 \left[ \left( \frac{r}{r_e} \right)^{1/4} - 1 \right].$$

2. Να δείξετε ότι από το νόμο του  $r^{1/4}$ :  $I(R) = I_e \exp \left[ -7.67 \left[ \left( \frac{R}{R_e} \right)^{1/4} - 1 \right] \right]$  έχουμε

ότι η συνολική λαμπρότητα ενός σφαιροειδούς δίνεται από τη σχέση

$$L = 8! \frac{e^{7.67}}{(7.67)^8} \pi r_e^2 I_e \cong 7.22 \pi r_e^2 I_e$$

Να δείξετε ότι  $R_e$  είναι όντως η ακτίνα η οποία περιέχει το μισό της συνολικής λαμπρότητας του γαλαξία.

(Δίνεται ότι  $\int_0^\infty e^{-x} x^7 dx = \Gamma(8) = 7!$  και  $\int_0^a e^{-x} x^7 dx = \gamma(8, a) = 7! \left[ 1 - e^{-a} \left( \sum_{m=0}^7 \frac{a^m}{m!} \right) \right]$  )

3. α) Με βάση τις ακόλουθες παραμέτρους του αστρού S2 γύρω από το Γαλαξιακό κέντρο να υπολογίσετε την ελάχιστη δυνατή πυκνότητα του Sgr A\*.

Περίοδος: 15.2 yr

Εκκεντρότητα τροχιάς: 0.87

Ελάχιστη απόσταση από το Γαλαξιακό κέντρο: 120AU

β) Ποιά είναι η μέγιστη ταχύτητα του S2;

Σε ποίο σημείο της τροχιάς του παρατηρείται;

γ) Θεωρώντας ότι η μάζα του είναι  $3.7 \times 10^6 M_\odot$  και ακτίνα 1AU να υπολογίσετε την πυκνότητα του Sgr A\* σε  $M_\odot/\text{AU}^3$ .

(Να θεωρήσετε γνωστές τις σχέσεις που περιγράφουν την κίνηση σωμάτων σε Κεπλέρειες τροχίες.)

4. . Εάν η ταχύτητα περιστροφής του Ηλιου γύρω από το Γαλαξιακό κέντρο είναι 220km/s να υπολογίσετε πόσες περιστροφές έχει κάνει ο Ηλιος γύρω από το Γαλαξιακό κέντρο από τη στιγμή του σχηματισμού του.

5. Να υπολογίσετε τη σχέση μεταξύ του αριθμού των άστρων με φωτεινότητα μεγαλύτερη από  $f$  ( $N(>f)$ ), συναρτήσει της φωτεινότητας  $f$ , θεωρώντας ότι:

- τα άστρα βρίσκονται σε ένα δίσκο,
- ο παρατηρητής βρίσκεται στο κέντρο του δίσκου και παρατηρεί κατά μήκος μιας ακτίνας του,
- η ακτινική πυκνότητα των άστρων ακολουθεί τη σχέση  $\rho(r) = \rho_0 e^{-r/h}$

Να συγκρίνετε το αποτέλεσμά σας με την αντίστοιχη σχέση για ομοιόμορφη κατανομή άστρων ( $\rho(r) = \rho_0$ ).

6. Υποθέστε ότι η κατανομή της πυκνότητας της σκοτεινής ύλης στον Γαλαξία δίνεται από τη σχέση  $\rho(r) = \rho_0 \left[1 + (r/a)^2\right]$  όπου  $a=2.8$  kpc.

(α) Δείξτε ότι σε απόσταση  $r$  από το κέντρο του Γαλαξία το ποσό μάζας που βρίσκεται εσωτερικά του  $r$  είναι  $M(r) = 4\pi\rho_0 a^2 \left[r - a \tan^{-1}(r/a)\right]$

(β) Εάν  $5.4 \times 10^{11} M_\odot$  σκοτεινής ύλης βρίσκεται σε ακτίνα έως 50 kpc από το κέντρο του Γαλαξία, υπολογίστε το  $\rho_0$  σε μονάδες  $M_\odot/\text{kpc}^3$

(γ) Υπολογίστε την πυκνότητα της σκοτεινής ύλης (σε  $\text{kg}/\text{m}^3$ ) στη περιοχή του Ηλίου.

7. α) Ξεκινώντας από τον 3<sup>ο</sup> Νόμο του Kepler να βρείτε μια έκφραση για την καμπύλη ταχύτητας  $v(R)$ , θεωρώντας ότι ο Ηλιος κινείται σε Κεπλέρια τροχιά γύρω από το κέντρο του Γαλαξία.

β) Με βάση το παραπάνω αποτέλεσμα να βρείτε μια έκφραση για τις σταθερές του Oort A και B

γ) Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή των παραπάνω σταθερών στην περιοχή του Ηλιου θεωρώντας  $R_0 = 8 \text{ kpc}$  και  $v_0 = 220 \text{ km/s}$ . Να εκφράσετε το αποτέλεσμα σας σε μονάδες  $\text{km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ .

δ) Οι απαντήσεις σας στο παραπάνω ερώτημα συμφωνούν με τις τιμές που έχουμε μετρήσει στην περιοχή του Ηλιου. Πώς ερμηνεύετε το αποτέλεσμα σας.

8. Να υπολογίσετε τη μεταβολή της ταχύτητας περιστροφής των άστρων στην περιοχή του Ηλιου συναρτήσει της απόστασής τους από το κέντρο του Γαλαξία ( $dv/dR$ ) θεωρώντας τις σταθερές του Oort  $A=+14.8 \text{ km/sec}$  και  $B=-12.4 \text{ km/sec}$ . Τι συμπεραίνετε για τη μεταβολή του  $v$  συναρτήσει της ακτίνας στην περιοχή του Ηλιου;

Εαν οι σταθερές του Oort είχαν τιμές  $A=+14.0 \text{ km/sec}$  και  $B=-14.0 \text{ km/sec}$  ποιά θα ήταν η τιμή του  $dv/dR$ . Τι συμπεραίναμε για τη μεταβολή του  $v$  συναρτήσει της ακτίνας στην περιοχή του Ηλιου σε αυτή την περίπτωση;

9. Θεωρήστε ότι στο κέντρο του Γαλαξία υπάρχει μία σημειακή μάζα  $M_0=3.7 \times 10^6 M_\odot$  και ότι η υπόλοιπη μάζα του Γαλαξία έχει πυκνότητα που μεταβάλεται ως  $\rho \propto r^{-2}$ .

α) Να δείξετε ότι εάν η κατανομή της μάζας είναι σφαιρικά συμμετρική, η μάζα στο εσωτερικό ακτίνας  $r$  δίνεται από τη σχέση:  $M(r) = kr + M_0$  όπου  $k$  είναι μια σταθερά.

β) Θεωρώντας κυκλικές κινήσεις και Νευτώνεια βαρύτητα, να δείξετε ότι η καμπύλη περιστροφής του Γαλαξία δίνεται από τη σχέση:  $v = \left[ G \left( k + \frac{M_0}{r} \right) \right]^{1/2}$

Να συγκρίνετε αυτή την καμπύλη ταχύτητας με την παρατηρούμενη.

γ) Εάν η ταχύτητα περιστροφής σε ακτίνα  $2\text{pc}$  είναι  $110 \text{ km/sec}$ , να υπολογίσετε την τιμή του  $k$ .

δ) Να σχεδιάσετε την ταχύτητα  $v$  συναρτήσει του  $\log(r)$  στην περιοχή  $0.01\text{pc} < r < 1 \text{ kpc}$ . Σε ποιά ακτίνα αρχίζει να γίνεται σημαντική η επίδραση της κεντρικής μάζας  $M_0$ .